



1. Juliana tem uma calculadora diferente, equipada com a tecla especial \odot . O que essa tecla faz é, cada vez que pressionada, transforma o número natural N que estiver na tela em outro número natural da seguinte forma: soma-se todas as potências de 2 cujos expoentes são os algarismos do número N . Por exemplo, se Juliana digitar 102 e pressionar três vezes a tecla especial aparecerá ao final o número 262, pois

$$102 \odot 2^1 + 2^0 + 2^2 = 7 \odot 2^7 = 128 \odot 2^1 + 2^2 + 2^8 = 262.$$

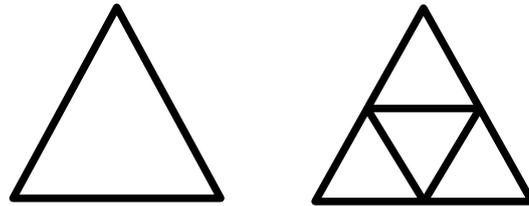
a) Se Juliana digitar o número 12 e pressionar a tecla especial cinco vezes quais os números que aparecerão na tela para cada vez que ela pressionar?

b) Encontre um número que Juliana deve digitar para que após pressionar a tecla especial quatro vezes o número que apareça na tela seja 6?

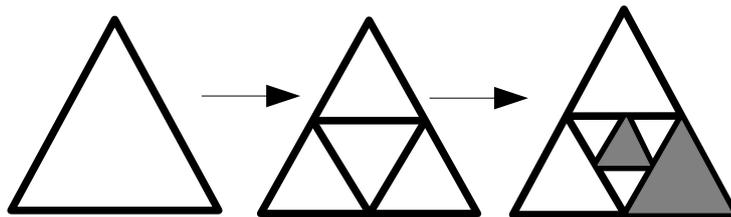
c) Se Juliana digitar o número 20, os números que aparecerão na tela logo após ela pressionar a tecla especial 10 vezes serão, na ordem, 5, 32, 12, 6, 64, 80, 257, 164, 82, 260. Iniciando com o número 20 e após pressionar a tecla especial 2018 vezes, qual número aparecerá na tela?



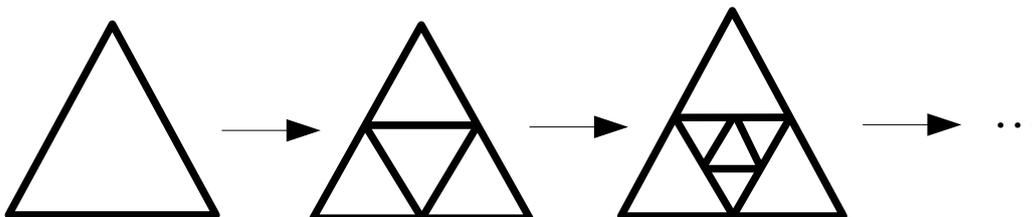
2. Dado um triângulo equilátero, se conectarmos todos os pontos médios dos lados do triângulo dividiremos esse triângulo em 4 triângulos menores de mesma área, conforme figura abaixo.



a) Aplicando o mesmo procedimento no triângulo central da figura acima obtemos uma nova quantidade de triângulos. Sabendo que a área da região hachurada é 5cm^2 , determine a área do triângulo inicial.



b) Aplicando o procedimento n vezes no triângulo central, obteremos um triângulo central menor de área 1. Sabendo que a área do triângulo inicial é 4096 cm^2 , qual é o valor de n ?





3. Benício gosta de brincar de escrever números num quadro. Nessa brincadeira, Benício escreve uma lista de números inteiros positivos no quadro e, a partir desta lista, forma outra lista da seguinte forma: escolhe dois números dentre os escritos para sair da lista e os substitui pela soma destes dois números acrescido de uma unidade, sendo que os demais números que não foram escolhidos permanecem na nova lista. Por exemplo, se Benício escreve os números

1, 2, 3, 4

e escolhe os números 2 e 3 para sair da lista, a nova lista de números será

1, 6, 4



2+3+1.

a) Iniciando com a lista 1, 2, 3, 4, 5, quantos passos serão necessários para a lista resultante conter apenas um número e qual seria o número ao final do processo?

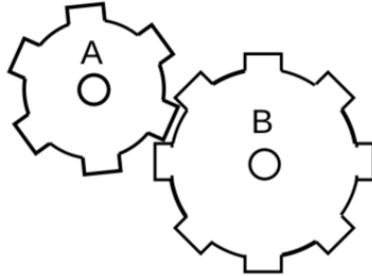
b) Exiba uma lista com 5 números diferentes para que o resultado ao final do processo seja apenas o número 19?

c) Se a lista de números for 1, 2, 3, 4, ..., 100 e o processo for aplicado repetidas vezes até restar apenas um número, o número que restará no final é par ou ímpar?



4. Considere duas engrenagens encaixadas uma na outra, conforme a figura abaixo. A engrenagem **A** possui 6 dentes e a engrenagem **B** possui 8 dentes, todos os dentes do mesmo tamanho.

a) Se a engrenagem **A** der 4 voltas, quantas voltas dará a engrenagem **B**?



b) Agora, considere 5 engrenagens encaixadas em fila, ou seja, a primeira e a última tem contato somente com uma adjacente e as 3 engrenagens centrais cada uma tem contato apenas com 2 engrenagens. A primeira tem 5 dentes e está encaixada com uma segunda engrenagem com 10 dentes, que está encaixada com uma terceira engrenagem que tem 20 dentes que por sua vez está encaixada numa quarta engrenagem que tem 80 dentes que, por sua vez, está encaixada numa quinta engrenagem que tem 160 dentes. Quando a engrenagem maior der uma volta completa qual é a soma das voltas que serão dadas por todas as demais engrenagens?

c) Agora, considere três engrenagens **X**, **Y** e **Z** com a engrenagem **X** encaixada na engrenagem **Y** que por sua vez está encaixada na engrenagem **Z** e as engrenagens **X** e **Z** sem contato entre si. Cada engrenagem tem um certo número de dentes. Sabe-se que a engrenagem **X** deu 160 voltas, a engrenagem **Y** deu 1007 voltas e a engrenagem **Z** deu 38 voltas. Qual é o menor valor possível para a soma da quantidade de dentes das engrenagens para que isso possa acontecer?



5. Duva gosta de criar jogos matemáticos. Desta vez, ele criou o seguinte jogo: em cada casa de um tabuleiro 5×5 , Duva escreve um dos números de 1 a 5 e nenhuma casa do tabuleiro pode ficar sem número. Além disso, casas simétricas em relação à diagonal principal (destacada na figura abaixo) contém números iguais e nenhuma linha ou coluna possui números repetidos.

a) Complete o tabuleiro abaixo com as regras do jogo de Duva.

4		3	2	
5		4		2
			1	
	3			
1		5	4	3

b) Iniciando com um tabuleiro vazio, quantas vezes o número 1 pode aparecer abaixo da diagonal principal?

c) Considerando todos os possíveis tabuleiros preenchidos com as regras do jogo de Duva, qual é o maior valor possível para a soma dos números da diagonal principal?



6. Dado uma quadra de números reais $\{a; b; c; d\}$, a partir dela é gerada uma outra quadra de números reais dada por

$$\{0,8a - 0,6b; 0,6a + 0,8b; 0,8c - 0,6d; 0,6c + 0,8d\}.$$

Quando, a partir da quadra $\{a; b; c; d\}$ geramos a quadra $\{x; y; z; w\}$, denotamos por $\{a; b; c; d\} \longrightarrow \{x; y; z; w\}$.

a) Determine as quadras $\{a; b; c; d\}$ e $\{x; y; z; w\}$ tais que $\{6; 8; 3; 4\} \longrightarrow \{a; b; c; d\} \longrightarrow \{x; y; z; w\}$.

b) Determine se a partir da quadra $\{6; 8; 3; 4\}$ é possível gerar a quadra $\{1002; 2007; 2010; 2016\}$.